This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Esta é uma cópia digital de um livro que foi preservado por gerações em prateleiras de bibliotecas até ser cuidadosamente digitalizado pelo Google, como parte de um projeto que visa disponibilizar livros do mundo todo na Internet.

O livro sobreviveu tempo suficiente para que os direitos autorais expirassem e ele se tornasse então parte do domínio público. Um livro de domínio público é aquele que nunca esteve sujeito a direitos autorais ou cujos direitos autorais expiraram. A condição de domínio público de um livro pode variar de país para país. Os livros de domínio público são as nossas portas de acesso ao passado e representam uma grande riqueza histórica, cultural e de conhecimentos, normalmente difíceis de serem descobertos.

As marcas, observações e outras notas nas margens do volume original aparecerão neste arquivo um reflexo da longa jornada pela qual o livro passou: do editor à biblioteca, e finalmente até você.

Diretrizes de uso

O Google se orgulha de realizar parcerias com bibliotecas para digitalizar materiais de domínio público e torná-los amplamente acessíveis. Os livros de domínio público pertencem ao público, e nós meramente os preservamos. No entanto, esse trabalho é dispendioso; sendo assim, para continuar a oferecer este recurso, formulamos algumas etapas visando evitar o abuso por partes comerciais, incluindo o estabelecimento de restrições técnicas nas consultas automatizadas.

Pedimos que você:

- Faça somente uso não comercial dos arquivos.
  A Pesquisa de Livros do Google foi projetada para o uso individual, e nós solicitamos que você use estes arquivos para fins pessoais e não comerciais.

- Evite consultas automatizadas.
  Não envie consultas automatizadas de qualquer espécie ao sistema do Google. Se você estiver realizando pesquisas sobre tradução automática, reconhecimento ótico de caracteres ou outras áreas para as quais o acesso a uma grande quantidade de texto for útil, entre em contato conosco. Incentivamos o uso de materiais de domínio público para esses fins e talvez possamos ajudar.

- Mantenha a atribuição.
  A "marca dágua" que você vê em cada um dos arquivos é essencial para informar as pessoas sobre este projeto e ajudá-las a encontrar outros materiais através da Pesquisa de Livros do Google. Não a remova.

- Mantenha os padrões legais.
  Independentemente do que você usar, tenha em mente que é responsável por garantir que o que está fazendo esteja dentro da lei. Não presuma que, só porque acreditamos que um livro é de domínio público para os usuários dos Estados Unidos, a obra será de domínio público para usuários de outros países. A condição dos direitos autorais de um livro varia de país para país, e nós não podemos oferecer orientação sobre a permissão ou não de determinado uso de um livro em específico. Lembramos que o fato de o livro aparecer na Pesquisa de Livros do Google não significa que ele pode ser usado de qualquer maneira em qualquer lugar do mundo. As conseqüências pela violação de direitos autorais podem ser graves.

Sobre a Pesquisa de Livros do Google

A missão do Google é organizar as informações de todo o mundo e torná-las úteis e acessíveis. A Pesquisa de Livros do Google ajuda os leitores a descobrir livros do mundo todo ao mesmo tempo em que ajuda os autores e editores a alcançar novos públicos. Você pode pesquisar o texto integral deste livro na web, em `http://books.google.com/`

Silva - Geometria Analytica - 1872.

Math
8558
72.2

Math 8558.72.2

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM

The Ministerio of Marine
Lisbon, Portugal

DE VARIAS FORMULAS NOVAS

DE

GEOMETRIA ANALYTICA

RELATIVAS

AOS EIXOS COORDENADOS OBLIQUOS

POR

DANIEL AUGUSTO DA SILVA

LISBOA
TYPOGRAPHIA DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA
1872

DE VARIAS FORMULAS NOVAS

DE

GEOMETRIA ANALYTICA

RELATIVAS

AOS EIXOS COORDENADOS OBLIQUOS

Ao Exmo Snr Dr Rufo G. Osorio
Offe e At

DE VARIAS FORMULAS NOVAS

DE

GEOMETRIA ANALYTICA

RELATIVAS

AOS EIXOS COORDENADOS OBLIQUOS

POR

DANIEL AUGUSTO DA SILVA

LISBOA
TYPOGRAPHIA DA ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA
1872

~~VI 98~~
Math 8558.72.2

1878, Feb. 11.
Gift of
the minister
of marine,
Lisbon, Portugal.

DE VARIAS FORMULAS NOVAS

DE

GEOMETRIA ANALYTICA

RELATIVAS AOS EIXOS COORDENADOS OBLIQUOS

---

1. Representaremos por H o volume do parallelipipedo determinado pelos tres eixos coordenados obliquos OX, OY, OZ, como arestas, tendo cada uma d'ellas a grandeza 1.

É facil de ver, que será $H = \text{sen}\,(X, Y)\ \text{sen}\,(Z, XY)$.

Depois daremos as diversas outras expressões, que póde ter H.

2. Em uma recta qualquer AP, da grandeza P, se tomarmos na sua direcção a extensão 1, representaremos essa linha por p, e as suas projecções obliquas sobre os tres eixos por p_x, p_y, p_z. Com essas convenções, se imaginarmos no espaço duas rectas concorrentes AP, AP'; a normal N commum a ambas, fará com os tres eixos angulos, cujos cosenos serão dados por as seguintes formulas

$$\left.\begin{aligned}
\text{Cos}\,(N, X) &= \frac{H\,(p_y p'_z - p'_y p_z)}{\text{sen}\ p p'} \\
\text{Cos}\,(N, Y) &= \frac{H\,(p_z p'_x - p'_z p_x)}{\text{sen}\ p p'} \\
\text{Cos}\,(N, Z) &= \frac{H\,(p_x p'_y - p'_x p_y)}{\text{sen}\ p p'}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

nas quaes o sentido da normal será tal, que, em relação a ella, AP, AP' tenham uma disposição analoga áquella, que tem OZ em relação a OX, OY.

Estas formulas são a generalisação das formulas analogas correspondentes aos eixos rectangulares, no qual caso é $H=1$.

3. As formulas precedentes podem-se deduzir da seguinte maneira.

A area s da projecção obliqua feita sobre o plano XY, do parallelogrammo S determinado pelas linhas Ap, Ap', ambas da grandeza 1, é dada pela equação

$$s=\text{sen}\,(X,\,Y)\,(p_x p'_y - p'_x p_y)\,^{1}$$

Ora s, e S dão a mesma projecção orthogonal sobre um plano perpendicular a OZ, isto é,

$$S\cos(N,\,Z)=s\,\text{sen}\,(Z,\,XY)=\text{sen}\,pp'\cos(N,\,Z);$$

d'onde

$$s=\frac{\text{sen}\,pp'\cos(N,\,Z)}{\text{sen}\,(Z,\,XY)},$$

e por conseguinte

$$\cos(N,\,Z)=\frac{\text{sen}\,(Z,\,XY)\,\text{sen}\,(X,\,Y)(p_x p'_y - p'_x p_y)}{\text{sen}\,pp'},$$

ou

$$\cos(N,\,Z)=\frac{H\,(p_x p'_y - p'_x p_y)}{\text{sen}\,pp'}.$$

E semelhantemente se deduzem os valores de cos $(N,\,X)$, cos $(N,\,Y)$.

4. O angulo, que formam entre si duas rectas P, P', situadas de qualquer modo no espaço, e cujo seno entra nas formulas precedentes, póde ser dado pelas projecções da unidade de cada uma d'essas linhas, feitas em relação a um systema de eixos obliquos.

[1] Esta formula equivale á que achámos na memoria *Da Transformação e reducção dos binarios*, *Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa*, 2.ª serie, tom. III, part. II, § 35.

Com effeito, imaginando passarem pela origem O duas rectas OA, OA' parallelas áquell'outras, e tomando sobre estas as grandezas

$$oa = oa' = 1,$$

a distancia aa' póde ser considerada, ou como lado do triangulo oaa', ou como diagonal de um parallelipipedo, cujas arestas contiguas são $a_x - a'_x$, $a_y - a'_y$, $a_z - a'_z$.

Estas duas accepções de aa' dão a equação

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + 2a_x a_y \cos XY + 2a_y a_z \cos YZ + 2a_x a_z \cos XZ$$

$$a'^2_x + a'^2_y + a'^2_z + 2a'_x a'_y \cos XY + 2a'_y a'_z \cos YZ + 2a'_x a'_z \cos XZ$$

$$-2 \cos AA' =$$

$$(a_x - a'_x)^2 + (a_y - a'_y)^2 + (a_z - a_z)^2 + 2(a_x - a'_x)(a_y - a'_y) \cos XY$$

$$+2(a_y - a'_y)(a_z - a'_z) \cos YZ + 2(a_x - a'_x)(a_z - a'_z) \cos XZ;$$

d'onde reduzindo acharemos

$$\cos AA' = a_x a'_x + a_y a'_y + a_z a'_z + (a_x a'_y + a'_x a_y) \cos XY$$

$$+(a_y a'_z + a'_y a_z) \cos YZ + (a_x a'_z + a'_x a_z) \cos XZ;$$

e semelhantemente

$$\left.\begin{array}{l} \cos pp' = p_x p'_x + p_y p'_y + p_z p'_z + (p_x p'_y + p'_x p_y) \cos XY \\ (p_y p'_z + p'_y p_z) \cos YZ + (p_x p'_z + p'_x p_z) \cos XZ \end{array}\right\} \ldots (B)$$

1.

5. A linha $p=1$ póde projectar-se orthogonalmente sobre cada um dos eixos obliquos por dois modos; ou directamente, ou projectando a linha quebrada composta das linhas p_x, p_y, p_z: a equivalencia das duas projecções para cada eixo, dá as seguintes equações:

$$\left.\begin{aligned}\cos(p, X)&=p_x+p_y\cos XY+p_z\cos XZ\\ \cos(p, Y)&=p_y+p_x\cos XY+p_z\cos YZ\\ \cos(p, Z)&=p_z+p_x\cos XZ+p_y\cos YZ\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (C)$$

Estas equações mudam (B) em

$$\cos pp'=p'_x\cos(p, X)+p'_y\cos(p, Y)+p'_z\cos(p, Z)\ldots\ldots (D)$$

formula que se obtem directamente, advertindo que a projecção de p' sobre p, equivale á projecção, sobre esta ultima, feita pela linha quebrada composta das rectas p'_x, p'_y, p'_z.

6. A formula (B) dá indirectamente, por meio das projecções de p, e p', o valor de sen pp', que entra nas formulas (A). Podemos tambem exprimir directamente sen pp' por meio das mesmas projecções.

Com effeito é

$$\operatorname{sen}^2 pp'=1-\cos^2 pp'=(p_x^2+p_y^2+p_z^2+2p_xp_y\cos XY+2p_yp_z\cos YZ+2p_xp_z\cos XZ)$$

$$\times(p'^2_x+p'^2_y+p'^2_z+2p'_xp'_y\cos XY+2p'_yp'_z\cos YZ+2p'_xp'_z\cos XZ,$$

$$-\left(p_xp'_x+p_yp'_y+p_zp'_z+(p_xp'_y+p'_xp_y)\cos XY+(p_yp'_z+p'_yp_z)\cos YZ+(p_xp'_z+p'_xp_z)\cos XZ\right)^2$$

Desenvolvendo, reduzindo, e reunindo os termos analogos, acharemos

$$\operatorname{sen}^2 pp' = (p_x p'_y - p'_x p_y)^2 \operatorname{sen}^2 XY + (p_y p'_z - p'_y p_z)^2 \operatorname{sen}^2 YZ + (p_z p'_x - p'_z p_x)^2 \operatorname{sen}^2 ZX$$

$$\left.\begin{array}{l}
-2(p_y p'_z - p'_y p_z)(p_z p'_x - p'_z p_x) \cos XY \\
-2(p_z p'_x - p'_z p_x)(p_x p'_y - p'_x p_y) \cos YZ \\
-2(p_x p'_y - p'_x p_y)(p_y p'_z - p'_y p_z) \cos ZX \\
+2(p_x p'_y - p'_x p_y)(p_y p'_z - p'_y p_z) \cos XY \cos YZ \\
+2(p_y p'_z - p'_y p_z)(p_z p'_x - p'_z p_x) \cos YZ \cos ZX \\
+2(p_z p'_x - p'_z p_x)(p_x p'_y - p'_x p_y) \cos ZX \cos XY
\end{array}\right\} \ldots (E)$$

Achamos pois sen pp' expresso nos angulos dos eixos coordenados, e nas tres funcções

$$p_x p'_y - p'_x p_y, \qquad p_y p'_z - p'_y p_z, \qquad p_z p'_x - p'_z p_x,$$

que são as tres projecções do parallelogrammo determinado por p, e p', feitas sobre os tres planos coordenados, e respectivamente divididas pelo seno do angulo dos dois eixos existentes em cada plano de projecção.

7. A formula (E) simplifica-se muito, introduzindo n'ella os angulos dos planos coordenados, que representaremos por X, Y, Z; pois que é, pelas relações conhecidas,

$$\cos XY = \cos Z \operatorname{sen} XZ \operatorname{sen} ZY + \cos XZ \cos ZY;$$

$$\cos YZ = \cos X \operatorname{sen} XY \operatorname{sen} XZ + \cos XY \cos XZ;$$

$$\cos ZX = \cos Y \operatorname{sen} XY \operatorname{sen} YZ + \cos XY \cos YZ;$$

as quaes mudam (E) em

$$\operatorname{sen}^2 pp' = (p_x p'_y - p'_x p_y)^2 \operatorname{sen}^2 XY + (p_y p'_z - p'_y p_z)^2 \operatorname{sen}^2 YZ + (p_z p'_x - p'_z p_x)^2 \operatorname{sen}^2 ZX$$

$$\left.\begin{array}{l} -2(p_y p'_z - p'_y p_z)(p_z p'_x - p'_z p_x) \cos Z \operatorname{sen} YZ \operatorname{sen} ZX \\ -2(p_z p'_x - p'_z p_x)(p_x p'_y - p'_x p_y) \cos X \operatorname{sen} XY \operatorname{sen} XZ \\ -2(p_x p'_y - p'_x p_y)(p_y p'_z - p'_y p_z) \cos Y \operatorname{sen} XY \operatorname{sen} YZ \end{array}\right\} \ldots\ldots (E')$$

E se designarmos por A, B, C as projecções obliquas do parallelogrammo pp' sobre os tres planos YZ, ZX, XY, será

$$\operatorname{sen}^2 pp' = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB \cos Z - 2BC \cos X - 2CA \cos Y \ldots\ldots (F)$$

8. Se multiplicarmos por $\frac{1}{4}$ todos os termos da equação precedente, e representarmos o triangulo formado por pp', e as suas projecções obliquas sobre os tres planos por

$$t, \quad t_{yz}, \quad t_{zx}, \quad t_{xy},$$

será

$$t^2 = t^2_{yz} + t^2_{zx} + t^2_{xy} - 2\, t_{yz} t_{zx} \cos Z - 2 t_{xz} t_{xy} \cos X - 2 t_{xy} t_{yz} \cos Y.$$

A propriedade, que representa a equação precedente em relação ao triangulo pp', cujos lados p, p' tem a grandeza 1, subsistiria para qualquer grandeza d'esses lados, o que equivaleria a multiplicar essa equação por $p^2 . p'^2$.

9. D'essa propriedade, correspondente a um triangulo qualquer, conclue-se facilmente um theorema analogo para qualquer polygono.

Teremos pois em relação a uma area qualquer S, e ás suas projecções obliquas nos tres planos, a seguinte equação

$$S^2 = S^2_{yz} + S^2_{zx} + S^2_{xy} - 2 S_{yz} S_{zx} \cos Z - 2 S_{zx} S_{xy} \cos X - 2 S_{xy} S_{yz} \cos Y \; (G)$$

10. Esta formula, que póde exprimir a relação entre um binario e os seus tres componentes em planos coordenados obliquos, resulta immediatamente de

que o eixo d'aquelle será diagonal do parallelipipedo, cujas arestas contiguas são os eixos dos componentes, advertindo que o angulo de dois d'estes ultimos eixos é supplemento do angulo dos planos coordenados respectivos.

11. A formula (G) corresponde á equação, que liga uma recta qualquer A com as suas projecções obliquas sobre os tres eixos, isto é,

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 + 2A_xA_y \cos XY + 2A_yA_z \cos YZ + 2A_zA_x \cos ZX \ldots \quad (G')$$

(G), e (G') representam casos particulares, para o tetraedro, e para o triangulo, dos theoremas geraes, que ligam entre si as faces de um polyedro, e os lados de um polygono; pois que os lados d'estes figuram um equilibrio de forças, bem como as faces d'aquelles um equilibrio de binarios [1].

12. Se na equação (E') substituirmos ás tres funcções $p_x p'_y - p'_x p_y$, etc., os seus valores dados pelas formulas (A), acharemos, sendo ON uma recta qualquer passando pela origem O,

$$\begin{aligned} H^2 = {} & \cos^2 NZ \operatorname{sen}^2 XY + \cos^2 NX \operatorname{sen}^2 YZ + \cos^2 NY \operatorname{sen}^2 ZX \\ & -2 \cos NX \cos NY \operatorname{sen} YZ \operatorname{sen} ZX \cos Z \\ & -2 \cos NY \cos NZ \operatorname{sen} ZX \operatorname{sen} XY \cos X \\ & -2 \cos NZ \cos NX \operatorname{sen} XY \operatorname{sen} YZ \cos Y \end{aligned}$$

equação de condição, que liga os tres angulos NX, NY, NZ, da qual é caso particular, para a hypothese de serem os eixos rectangulares, a conhecida relação

$$1 = \cos^2 NZ + \cos^2 NX + \cos^2 NY.$$

13. Passaremos a fazer algumas applicações das formulas (A)

Na memoria citada ácerca da theoria dos binarios, conseguimos obter, para o caso dos eixos coordenados obliquos, a vantagem da decomposição directa d'um binario em tres planos coordenados, vantagem que realisaram para os eixos rectangulares as formulas de Duhamel.

As nossas formulas (A) ministram-nos outro meio de chegar tambem á mesma decomposição directa.

Seja $AP = P$ uma força qualquer applicada ao ponto A, que dê, transportada á origem O, o binario cujo braço obliquo seja OA.

[1] Vide a Memoria precedentemente citada § 21.

Represente k o momento d'esse binario, e sejam L sen YZ, M sen XZ, N sen XY os seus componentes nos tres planos coordenados.

Sendo n normal ao plano OAP, será k cos (n, X) a acção de k em relação ao eixo OX; e como os binarios M sen XZ, N sen XY tem uma acção nulla em relação ao mesmo eixo, por este existir no plano d'elles, será

$$k \cos (n, X) = L \text{ sen } YZ \times \text{sen } (X, YZ) \ldots\ldots\ (H)$$

Representando A a grandeza OA, e exprimindo por a, e p as grandezas eguaes á unidade tomadas sobre A, e P, teremos pelas formulas (A)

$$\cos (n, X) = \frac{H(a_y p_z - p_y a_z)}{\text{sen } ap};$$

mas é

$$k = PA \text{ sen } pa;$$

logo (H) muda-se em

$$HPA\ (a_y p_z - p_y a_z) = L \text{ sen } YZ \text{ sen } (X, YZ) \ldots\ldots\ (I)$$

Ora sendo x, y, z as coordenadas de A; e X, Y, Z as componentes de P, acha-se

$$Aa_y = y;\ Aa_z = z;\ Pp_z = Z;\ Pp_y = Y;$$

e por conseguinte transformando (I), e escrevendo as formulas, que semelhantemente se deduzem para os outros eixos, teremos

$$L \text{ sen } YZ = \text{sen } YZ\ (yZ - zY);$$
$$M \text{ sen } ZX = \text{sen } ZX\ (zX - xZ);$$
$$N \text{ sen } XY = \text{sen } XY\ (xY - yX);$$

d'onde se conclue, que para um numero qualquer de forças no espaço P, P', etc. serão os binarios totaes existentes em cada um dos tres planos coordenados

$$\text{sen } YZ \Sigma L = \text{sen } YZ \Sigma\ (yZ - zY);$$
$$\text{sen } ZX \Sigma M = \text{sen } ZX \Sigma\ (zX - xZ);$$
$$\text{sen } XY \Sigma N = \text{sen } XY \Sigma\ (xY - yX).$$

14. A formula (D) dá immediatamente a condição necessaria para a perpendicularidade de duas rectas p, p', isto é, deveremos ter n'esse caso

$$o = p'_x \cos(p, X) + p'_y \cos(p, Y) + p'_z \cos(p, Z).$$

15. Tambem a mesma formula (D) nos poderá ministrar uma expressão nova, para o caso dos eixos coordenados obliquos, do angulo, que entre si formam a resultante R de um systema qualquer de forças, com o eixo do binario resultante K.

Com effeito, designando esse angulo por RK, e por KX, KY, KZ os angulos do eixo de K com os eixos coordenados, será

$$\cos RK = r_x \cos KX + r_y \cos KY + r_z \cos KZ;$$

e multiplicando a equação precedente por RK, e exprimindo por ΣX, ΣY, ΣZ as sommas das componentes das forças dadas, será

$$RK \cos RK = \Sigma X.\ K \cos KX + \Sigma Y.\ K \cos KY + \Sigma Z.\ K \cos KZ \ldots (J)$$

Ora da equação (H) conclue-se

$$K \cos KX = \Sigma L.\ \text{sen}\ YZ\ \text{sen}\ (X, YZ) = H \Sigma L;$$

e semelhantes formulas teremos para os outros dois eixos; taes relações mudarão por tanto (J) em

$$RK \cos RK = H\,(\Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N) \ldots\ldots\ldots\ (K)$$

generalisação da formula conhecida para o caso dos eixos rectangulares, na qual hypothese é $H = 1$.

16. De (K) se deduz a condição necessaria para a existencia da resultante unica, isto é, n'esse caso, ter-se-ha

$$o = \Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N.$$

17. Na equação (K) R póde exprimir-se pelas componentes de cada força, isto é,

$$R^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2 + 2\Sigma X \Sigma Y \cos XY$$
$$+ 2\Sigma Y \Sigma Z \cos YZ + 2\Sigma Z \Sigma X \cos ZX.$$

Semelhantemente teremos

$$K^2 = \operatorname{sen}^2 YZ\,(\Sigma L)^2 + \operatorname{sen}^2 ZX\,(\Sigma M)^2 + \operatorname{sen}^2 XY\,(\Sigma N)^2$$

$$\begin{aligned} &-2\Sigma L \Sigma M \operatorname{sen} YZ \operatorname{sen} ZX \cos Z \\ &-2\Sigma L \Sigma N \operatorname{sen} YZ \operatorname{sen} XY \cos Y \\ &-2\Sigma M \Sigma N \operatorname{sen} YX \operatorname{sen} XZ \cos X. \end{aligned}$$

18. Os tres angulos, que o eixo de K faz com os eixos coordenados, são, como vimos precedentemente, dados pelas equações

$$\cos KX = \frac{H}{K}\Sigma L;\ \cos KY = \frac{H}{K}\Sigma M;\ \cos KX = \frac{H}{K}\Sigma N,$$

formulas, que apenas differem das relativas aos eixos coordenados rectangulares, em que, para estes, é $H=1$.

19. Seja para um systema de eixos obliquos OX', OY', OZ', designado por H' o parallelipipedo determinado pelas tres grandezas respectivamente tomadas sobre esses eixos $a'=b'=c'=1$; teremos sempre a relação

$$\frac{H'}{H} = a'_x b'_y c'_z - a'_x b'_z c'_y + a'_y b'_z c'_x - a'_y b'_x c'_z + a'_z b'_x c'_y - a'_z b'_y c'_x \ldots\ (L)$$

Esta formula é conhecida no caso de serem rectangulares os eixos OX, OY, OZ, na qual hypothese é $H=1$.

As formulas (A) conduzir-nos-hão directamente á demonstração da equação (L). Com effeito o seu segundo membro equivale a

$$a'_x(b'_y c'_z - b'_z c'_y) + a'_y(b'_z c'_x - b'_x c'_z) + a'_z(b'_x c'_y - b'_y c'_x),$$

que, em vista das equações (A), e representando por N a normal ao plano $Y'Z'$, se muda em

$$\frac{\operatorname{sen} Y'Z'}{H}\Big(a'_x \cos(N, X) + a'_y \cos(N, Y) + a'_z \cos(N, Z)\Big),$$

isto é

$$\frac{\operatorname{sen} Y'Z'}{H} \cos(a', N) = \frac{\operatorname{sen} Y'Z' \operatorname{sen}(X', Y'Z')}{H} = \frac{H'}{H},$$

como se pretendia demonstrar.

20. Para passar das coordenadas relativas ao systema $OX'Y'Z'$ para as correspondentes ao systema $OXYZ$, temos as equações

$$\left.\begin{aligned} x &= a'_x x' + b'_x y' + c'_x z' \\ y &= a'_y x' + b'_y y' + c'_y z' \\ z &= a'_z x' + b'_z y' + c'_z z' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (M)$$

Semelhantemente teremos

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{x'} x + b_{x'} y + c_{x'} z \\ y' &= a_{y'} x + b_{y'} y + c_{y'} z \\ z' &= a_{z'} x + b_{z'} y + c_{z'} z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (N)$$

De (M) póde passar-se para (N), e reciprocamente, pelos processos de eliminação.

As formulas respectivas dão para o denominador commum, partindo de (M),

$$D = a'_x b'_y c'_z - a'_x b'_z c'_y + a'_y b'_z c'_x - a'_y b'_x c'_z + a'_z b'_x c'_y - a'_z b'_y c'_x;$$

e partindo de (N)

$$D' = a_{x'} b_{y'} c_{z'} - a_{x'} b_{z'} c_{y'} + a_{y'} b_{z'} c_{x'} - a_{y'} b_{x'} c_{z'} + a_{z'} b_{x'} c_{y'} - a_{z'} b_{y'} c_{x'};$$

ora é,

$$D = \frac{H'}{H}; \quad \text{e} \quad D' = \frac{H}{H'};$$

logo

$$DD' = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (O)$$

21. Se tivessemos dois systemas de eixos obliquangulos OXY, $OX'Y'$, situados no mesmo plano, teriamos semelhantemente

$$x = a'_x x' + b'_x y';$$
$$y = a'_y x' + b'_y y';$$

$$x' = a_{x'} x + b_{x'} y;$$
$$y' - a_{y'} x + b_{y'} y;$$

e os denominadores commums para os dois grupos, sendo h, h' as areas dos parallelogrammos determinados por a, b, e por a', b', seriam

$$d = a'_x b'_y - a'_y b'_x = \frac{h'}{\text{sen } XY} = \frac{h'}{h};$$

$$d' = a_{x'} b_{y'} - a_{y'} b_{x'} = \frac{h}{\text{sen } X'Y'} = \frac{h}{h'};$$

e por isso tambem n'este caso

$$dd' = 1.$$

Poderiamos ultimamente accrescentar, que se tivessemos uma só equação

$$x = ax',$$

a que corresponde a reciproca

$$x' = \frac{1}{a} x;$$

achar-se-hia, que é tambem 1 o producto dos dois denominadores.

22. Se em vez dos grupos (M), (N) tivessemos dois grupos analogos em que fosse qualquer m o numero das variáveis x, y, z, etc, ou x', y', z', etc., os denominadores commums D, D' dos dois grupos satisfariam sempre á relação

$$DD' = 1.$$

Posteriormente procuraremos, em outro escripto, dar a demonstração geral d'esse theorema.

23. Se applicarmos as formulas de eliminação ás equações (M), acharemos

$$x' = \frac{b'_y c'_z - b'_z c'_y}{D} x + \frac{b'_z c'_x - b'_x c'_z}{D} y + \frac{b'_x c'_y - b'_y c'_x}{D} z;$$

$$y' = \frac{c'_y a'_z - c'_z a'_y}{D} x + \frac{c'_z a'_x - c'_x a'_z}{D} y + \frac{c'_x a'_y - c'_y a'_x}{D} z;$$

$$z' = \frac{a'_y b'_z - a'_z b'_y}{D} x + \frac{a'_z b'_x - a'_x b'_z}{D} y + \frac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{D} z;$$

que comparadas com (N) produzem as equações de condição

$$\left.\begin{array}{l} a_{x'} = \dfrac{b'_y c'_z - b'_z c'_y}{D};\ b_{x'} = \dfrac{b'_z c'_x - b'_x c'_z}{D};\ c_{x'} = \dfrac{b'_x c'_y - b'_y c'_x}{D}; \\[2ex] a_{y'} = \dfrac{c'_y a'_z - c'_z a'_y}{D};\ b_{y'} = \dfrac{c'_z a'_x - c'_x a'_z}{D};\ c_{y'} = \dfrac{c'_x a'_y - c'_y a'_x}{D}; \\[2ex] a_{z'} = \dfrac{a'_y b'_z - a'_z b'_y}{D};\ b_{z'} = \dfrac{a'_z b'_x - a'_x b'_z}{D};\ c_{z'} = \dfrac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{D}; \end{array}\right\} \ldots (P)$$

Com formulas analogas exprimiriamos os nove parametros a'_x, b'_x, c'_x, a'_y, etc. por meio dos parametros $a_{x'}$, $b_{x'}$, $c_{x'}$, $a_{y'}$, etc.

24. Os nove parametros de qualquer dos grupos (M), (N) podem ser sujeitos a seis equações de condição, em que entrem os angulos, que entre si fazem os eixos de cada um dos dois systemas.

Com effeito, se considerarmos o grupo (M), pela formula (B) teriamos as tres condições;

$$\cos X'Y' = a'_x b'_x + a'_y b'_y + a'_z b'_z + (a'_x b'_y + b'_x a'_y) \cos XY$$
$$+ (a'_y b'_z + b'_y a'_z) \cos YZ + (a'_z b'_x + b'_z a'_x) \cos ZX;$$

$$\cos Y'Z' = b'_x c'_x + b'_y c'_y + b'_z c'_z + (b'_x c'_y + c'_x b'_y) \cos X1$$
$$(b'_y c'_z + c'_y b'_z) \cos YZ + (b'_z c'_x + c'_z b'_x) \cos ZX;$$

$$\cos Z'X' = c'_x a'_x + c'_y a'_y + c'_z a'_z + (c'_x a'_y + a'_x c'_y) \cos XY$$
$$(c'_y a'_z + a'_y c'_z) \cos YZ + (c'_z a'_x + a'_z c'_x) \cos ZX;$$

e pela formula (G')

$$1 = a'^2_x + a'^2_y + a'^2_z + 2a'_x a'_y \cos XY + 2a'_y a'_z \cos YZ + 2a'_z a'_x \cos ZX;$$

$$1 = b'^2_x + b'^2_y + b'^2_z + 2b'_x b'_y \cos XY + 2b'_y b'_z \cos YZ + 2b'_z b'_x \cos ZX;$$

$$1 = c'^2_x + c'^2_y + c'^2_z + 2c'_x c'_y \cos XY + 2c'_y c'_z \cos YZ + 2c'_z c'_x \cos ZX.$$

Semelhantes equações estabeleceriamos para o grupo (N).

25. Sejam L, M, N as tres arestas contiguas de um parallelipipedo; V o seu volume; H o valor de V quando as tres arestas são eguaes á unidade: é sempre

$$V = LMNH.$$

Representemos respectivamente por l, m, n as tres distancias das faces MN, LN, LM ás suas oppostas parallelas; por a, b, c, os angulos formados por essas arestas, tomadas duas a duas, e por A, B, C os angulos diedros oppostos no mesmo angulo triedro; será

$$V = lMN \operatorname{sen} a = mNL \operatorname{sen} b = nLM \operatorname{sen} c = LMNH;$$

d'onde

$$l = \frac{L}{\operatorname{sen} a} H;\ m = \frac{M}{\operatorname{sen} b} H;\ n = \frac{N}{\operatorname{sen} c} H \ldots\ldots\ldots (R)$$

relações, que equivalem ás seguintes, que são obvias

$$l = L \operatorname{sen} (L, MN);\ m = M \operatorname{sen} (M, LN);\ n = N \operatorname{sen} (N, LM).$$

26. As formulas (R) dão as tres alturas l, m, n de um parallelipipedo, quando se conheça a funcção H, e a aresta respectiva á altura pedida.

A recta l representa tambem a distancia perpendicular entre a aresta M, e qualquer das duas arestas parallelas a N, e situadas na face parallela a MN; analoga significação podem ter m, e n.

27. As equações (R) dão pois a solução do problema, em que se peça a distancia perpendicular (v. gr. l) de duas rectas, quando se dá uma distancia obliqua (L) d'essas rectas, e as reciprocas inclinações d'essa distancia, e das rectas dadas.

Reciprocamente, sendo conhecidas essas tres inclinações, a dicta distancia obliqua será dada pelo conhecimento da distancia perpendicular.

28. Exporemos agora os diversos valores que póde ter H expresso pelos angulos a, b, c, A, B, C.

Sendo

$$H = \text{sen } a \times \text{sen } (L, MN);$$

e como pela trigonometria espherica

$$\text{sen } (L, MN) = \text{sen } b \text{ sen } C,$$

será

$$H = \text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } C = \text{sen } b \text{ sen } c \text{ sen } A = \text{sen } c \text{ sen } a \text{ sen } B \ldots (S)$$

29. Das formulas precedentes passa-se facilmente para as seguintes, em que entram os tres angulos diedros, e um angulo plano:

$$H = \frac{\text{sen}^2 a \text{ sen } B \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen}^2 b \text{ sen } A \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen}^2 c \text{ sen } A \text{ sen } B}{\text{sen } C} \ldots (T)$$

30. Como é

$$\cos c = \text{sen } a \text{ sen } b \cos C + \cos a \cos b,$$

a primeira das relações (S), e semelhantemente as outras, darão as seguintes, em que entram os tres angulos planos, e um angulo diedro

$$H = tg\, C (\cos c - \cos a \cos b) = tg\, A (\cos a - \cos b \cos c) = tg\, B (\cos b - \cos a \cos c) \ldots (U)$$

31. Se representarmos por s a semisomma dos angulos a, b, c, será pela trigonometria espherica

$$\text{sen } C = \frac{2\sqrt{\text{sen } s \text{ sen } (s-a) \text{ sen } (s-b) \text{ sen } (s-c)}}{\text{sen } a \text{ sen } b};$$

e por conseguinte, pelas relações (S),

$$H=2\sqrt{\text{sen } s \text{ sen } (s-a) \text{ sen } (s-b) \text{ sen } (s-c)} \ldots\ldots\ldots (V)$$

32. Como tambem se designarmos por S a semisomma dos tres angulos A, B, C, é

$$\text{sen } c=\frac{2\sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}{\text{sen } A \text{ sen } B} \ldots\ldots (V')$$

e

$$\text{sen } b=\frac{2\sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}{\text{sen } C \text{ sen } A};$$

deduziremos de (S)

$$H=\frac{-4 \cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}{\text{sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C} \ldots\ldots\ldots (X)$$

33. Sendo

$$\text{sen } s \text{ sen } (s-a) \text{ sen } (s-b) \text{ sen } (s-c)=\tfrac{1}{4} (\cos a-\cos (b+c)) (\cos (b-c)-\cos a)$$

$$=\tfrac{1}{4} (\text{sen}^2 a+\text{sen}^2 b+\text{sen}^2 c+2 \cos a \cos b \cos c-2) \ldots\ldots\ldots\ldots (X')$$

esta relação muda (V) em

$$H=\sqrt{\text{sen}^2 a+\text{sen}^2 b+\text{sen}^2 c+2 \cos a \cos b \cos c-2}$$

$$=\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2 \cos a \cos b \cos c} \ldots\ldots (Y)$$

34. Como applicando a formula (X') ao triangulo supplementario d'aquelle, que é determinado pelos lados a, b, c, achamos

$$-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)=\tfrac{1}{4} (\text{sen}^2 A+\text{sen}^2 B+\text{sen}^2 C-2 \cos^2 A \cos B \cos C-2) \ldots\ldots\ldots (Y')$$

(X) transforma-se em

$$H=\frac{\text{sen}^2 A+\text{sen}^2 B+\text{sen}^2 C-2 \cos A \cos B \cos C-2}{\text{sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C}=\frac{1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2 \cos A \cos B \cos C}{\text{sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C} \ldots (Z)$$

35. De (Y), e (Z) conclue-se para qualquer triangulo espherico a relação

$$\sqrt{\text{sen}^2 a+\text{sen}^2 b+\text{sen}^2 c+2\cos a\cos b\cos c-2}=\frac{\text{sen}^2 A+\text{sen}^2 B+\text{sen}^2 C-2\cos A\cos B\cos C-2}{\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}..(AA)$$

36. Sendo em virtude de (V'), e de (Y')

$$\text{sen}\,c=\frac{\sqrt{\text{sen}^2 A+\text{sen}^2 B+\text{sen}^2 C-2\cos A\cos B\cos C-2}}{\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B};$$

esta equação mudará (AA) na notavel relação

$$\frac{\sqrt{\text{sen}^2 a+\text{sen}^2 b+\text{sen}^2 c+2\cos a\cos b\cos c-2}}{\sqrt{\text{sen}^2 A+\text{sen}^2 B+\text{sen}^2 C-2\cos A\cos B\,\text{ccs}\,C-2}}=\frac{\text{sen}\,c}{\text{sen}\,C}=\frac{\text{sen}\,b}{\text{sen}\,B}=\frac{\text{sen}\,a}{\text{sen}\,A}\ldots\ldots(BB)$$

37. Se continuando H a representar o volume do parallelipipedo correspondente ao triangulo espherico a, b, c, exprimir H_1 o volume do parallelipipedo correspondente ao triangulo supplementario d'aquelle, teremos

$$H_1=\sqrt{\text{sen}^2 A+\text{sen}^2 B+\text{sen}^2 C-2\cos A\cos B\cos C-2};$$

e por conseguinte (BB) equivale ao seguinte theorema

$$H:H_1::\text{sen}\,a:\text{sen}\,A::\text{sen}\,b:\text{sen}\,B:\text{sen}\,c:\text{sen}\,C;$$

isto é, a relação, n'um triangulo espherico, do seno de qualquer lado para o seno do angulo opposto equivale á relação dos volumes dos parallelipipedos determinados pelo triangulo dado, e pelo seu supplementario.

38. O theorema precedente deduz-se tambem facilmente de (S), pois que será

$$H_1=\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,c;$$

e por conseguinte

$$\frac{H}{H_1}=\frac{\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c\,\text{sen}\,A}{\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B\,\text{sen}\,c}=\frac{\text{sen}\,b}{\text{sen}\,B}.$$

39. Poderiamos chegar a estabelecer a relação (L) independentemente do emprego das formulas (A).

Com effeito imaginemos, em primeiro logar, dois systemas de eixos $OXYZ$, $O\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$, em que OX, OY, $O\dot{X}$, $O\dot{Y}$ se acham no mesmo plano, e em que $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$ representam respectivamente a unidade tomada sobre a direcção de cada um dos eixos do segundo systema. Sendo $\dot{H}$ o parallelipipedo correspondente a $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, teremos, sendo p a perpendicular baixada do extremo de $\dot{c}$ sobre XY,

$$\dot{H} = \text{parallelogrammo } \dot{a}\dot{b} \times p = \text{sen } XY\,(\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{b}_x \dot{a}_y)\,p;$$

ora

$$p = \dot{c}_z \text{ sen } (Z, XY),$$

logo

$$\dot{H} = \text{sen } XY \text{ sen } (Z, XY)\,\dot{c}_z\,(\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{b}_x \dot{a}_y),$$

d'onde

$$\frac{\dot{H}}{H} = \dot{a}_x \dot{b}_y \dot{c}_z - \dot{a}_y \dot{b}_x \dot{c}_z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (CC)$$

que é o theorema (L) no caso actual, em que $\dot{b}_z = \dot{a}_z = o$.

40. Passemos ao caso geral, em que o systema de eixos $O\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$ tomou uma posição qualquer $OX'Y'Z'$ em relação a $OXYZ$.

Das equações (M)

$$x = a'_x x' + b'_x y' + c'_x z';$$
$$y = a'_y x' + b'_y y' + c'_y z';$$
$$z = a'_z x' + b'_z y' + c'_z z';$$

conclue-se

$$z' = \frac{z(a'_x b'_y - a'_y b'_x) + y(a'_z b'_x - a'_x b'_z) + x(a'_y b'_z - a'_z b'_y)}{c'_z(a'_x b'_y - a'_y b'_x) + c'_y(a'_z b'_x - a'_x b'_z) + c'_x(a'_y b'_z - a'_z b'_y)} \ldots (DD)$$

Tirando pelo extremo de c' um plano parallelo a $X'Y'$, e que encontre o eixo OZ a uma distancia r da origem, será para o extremo d'essa distancia

$$x = y = o; \quad z = r; \quad z' = c' = 1,$$

e por conseguinte (DD) dará

$$r(a'_x b'_y - a'_y b'_x) = a'_x b'_y c'_z - a'_y b'_x c'_z + \text{etc} = D \ldots\ldots \quad (EE)$$

Esta equação nos dará o nosso theorema geral, mediante as seguintes considerações.

Seja S' a area do parallelogrammo determinado pelos lados a', b'; P a sua projecção orthogonal sobre um plano perpendicular a OZ; S'_{xy} o vestigio que fazem no plano XY as linhas que dão a projecção P.

Será

$$S' = \text{parallelogrammo } (\dot{a}, \dot{b}) = \text{sen } XY\,(\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{a}_y \dot{b}_x);$$

$$S'_{xy} = \text{sen } XY\,(a'_x b'_y - a'_y b'_x);$$

mas sendo N, e N' as normaes aos planos XY, $X'Y'$, é

$$S' \cos N'Z = P = S'_{xy} \cos NZ,$$

d'onde

$$\frac{S'_{xy}}{\cos N'Z} = \frac{S'}{\cos NZ},$$

ou

$$\frac{\text{sen } XY\,(a'_x b'_y - a'_y b'_x)}{\cos N'Z} = \frac{\text{sen } XY\,(\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{a}_y \dot{b}_x)}{\cos NZ};$$

Ora como a perpendicular baixada do extremo c' sobre o plano $X'Y'$ é egual á perpendicular p baixada do extremo de $\dot{c}$ sobre o plano XY, teremos

$$\frac{p}{\cos N'Z} = r; \quad \frac{p}{\cos NZ} = \dot{c}_z,$$

equações, que mudam a precedente em

$$r(a'_x b'_y - a'_y b'_x) = \dot{c}_z(\dot{a}_x \dot{b}_y - \dot{a}_y \dot{b}_x),$$

a qual em vista de (CC), e (EE) dará finalmente a these geral, que se pretendia demonstrar

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{H'}{H} = D.$$

41. Estabelecido o precedente theorema, é extremamente facil concluir das equações (M) as nossas formulas (A).

Com effeito d'essas equações deduz-se

$$x' = \frac{b'_y c'_z - c'_y b'_z}{D} x + \frac{b'_z c'_x - c'_z b'_x}{D} y + \frac{b'_x c'_y - c'_x b'_y}{D} z \ldots . \quad (FF)$$

mas sendo N' a normal ao plano $Y'Z'$ é

$$x' \cos N'X' = x \cos N'X + y \cos N'Y + z \cos N'Z;$$

e se OX' coincidir com N',

$$x' = x \cos N'X + y \cos N'Y + z \cos N'Z,$$

equação, que comparada com (FF) dá

$$\cos N'X = \frac{b'_y c'_z - c'_y b'_z}{D};$$

$$\cos N'Y = \frac{b'_z c'_x - c'_z b'_x}{D};$$

$$\cos N'Z = \frac{b'_x c'_y - c'_x b'_y}{D};$$

formulas, que coincidem com (A), se advertirmos que

$$D = \frac{H'}{H} = \frac{\text{sen } b'c'}{H}.$$

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

Math 8558.72.2
De varias formulas novas de geometr
Cabot Science
003373786
3 2044 091 928 705